「創造的哲学者の会」発表

安田清一郎

2016 年 8 月 2 日

アウトライン

1. The nonemptiness requirement for the "underlying set" of an axiomatic definition　（例はこちら）
2. Requirement の動機（仮説１）：当該の抽象概念が存在定理を有する（＝存在定理導出可能 existentializable である）場合、内在する「存在論的コミットメント」を明確化・言語化。
3. 抽象概念の一部は純普遍公理化が可能（universalizable）である（例：群、ブール代数）。　そのような抽象概念は「存在論的コミットメント」フリーである。
4. 直観の衝突：universalizable ながらも existentializable な抽象概念（例：群、ブール代数）に関しては、次の二つの直観が衝突する。
   (1) If an abstract concept is existentializable, then, it cannot have any empty model.
   (2) If an abstract concept is universalizable, then, the empty set *vacuously* constitutes (the "underlying set" of) an empty model.
5. Requirement の動機（仮説２）：「この種の直観衝突の際は直観**(2)**を斥け直観**(1)**を採用する」という数学界の共有意思の表れ、およびその「継承宣言」。
6. 直観衝突に、ほかの「解決」はないのか？
7. 量化子二用法使い分け論
   - 意味論的（descriptive-semanticist）用法：全称・存在*ともに*、existential import を伴う用法。我々は言及的（referential な）文脈ではこれを採用すべきだし、事実採用している。
   - 語用論的（normative-pragmaticist）用法：全称・存在*ともに*、existential import を伴わない用法。我々は推論的（inferential な）文脈ではこれを採用すべきだし、事実採用している。
   - 我々は数学の実践においては「量化」という言語行為をこの二つの用法で使い分けている。ただ、（ネイティブ話者が母語の文法を「知らない」ように）自らの体得している「量化の文法」を知らないだけ。
8. 「解決」：　抽象概念定義としての公理やその定理は推論的文脈をなすので、存在量化子でも「存在論的コミットメント」フリーである。よってそもそも「直観衝突」が我々の「文法無知」による誤解である。Requirement はまったく不要。
9. 【補足】「言語行為としての数学」論（久木田 2015）の発展（ないし要請）としての二解釈論[1]
   - Reference, predication, and quantification as *sub-locutionary* acts
   - Dialogicality, that is, (i) "Illocutionarity" (conventionalized formality) *and* (ii) "perlocutionarity" (i.e., success-contingency) of those sub-locutionary acts[2]

[1] または、Brandom (1998) の the deontic scorekeeping model の補強理論（とくに、このモデルを「数学的論証」の分析に適用しうるような形で補強する理論）としての。

[2] E.g., the act of reference (i) requires the maker of the act to do certain conventionally defined things in a certain conventionally defined order. But, just as "to refer to" is a 'success verb,' (ii) the successful achievement of the act of reference depends on how the receiver of the act *takes* the act, that is, whether, upon the reception of the act, the receiver treats that act (of the would-be reference) indeed *as* the act of reference to the intended referent.

The nonemptiness requirement の現れ方いろいろ

- In Gilbert J. & Gilbert L., 2005, Elements of Modern Algebra (6th ed.), Thomson Brooks/Cole.

  An algebraic structure, or algebraic system, is a *nonempty* set in which at least one equivalence relation (equality) and one or more binary operations are defined. (p. 118, red emphasis added)

- Lang, D., Algebra (2nd ed.), Addison-Wesley.

  A monoid is a set G, with a law of composition which is associative, and having a unit element (so that in particular, G *is not empty*). (p. 3, red emphasis added)

- Stoll, R., Set Theory and Logic, Dover.

  THEOREM 3.1 The following is a formulation of the theory of Boolean algebras. The primitive notions are an unspecified set B of *at least two elements*, a binary operation $\cap$ in B, and a unary operation ' in B. The axioms are as follows.... (p. 255, red emphasis added)

  注：Stoll はこの定理 3.1 の前にブール代数を標準的に定義しているが、そこではこのような nonemptiness requirement は明示されていない。二つの固体記号 1 と 0 がそれを不要にしているので。

群の標準的定義

（上記 Gilbert & Gilbert 2005 の定義を参照し表記整理した）

A (nonempty) set $\boldsymbol{G}$ is a group with respect to $*$ provided these conditions hold:

1. $\boldsymbol{G}$ is closed under *. $\quad \forall x, y \in \boldsymbol{G}\ \exists!\, z \in \boldsymbol{G} \quad x * y = z$
2. $*$ is associative. $\quad \forall x, y, z \in \boldsymbol{G} \quad (x * y) * z = x * (y * z)$
3. $\boldsymbol{G}$ has an identity element e. $\quad \exists e \in \boldsymbol{G}\ \ \forall x \in \boldsymbol{G} \quad x * e = e * x = x$
4. $\boldsymbol{G}$ contains inverses. $\quad \forall x \in \boldsymbol{G}\ \exists y \in \boldsymbol{G} \quad x * y = y * x = e$

注：公理 3 では記号 e は、固体記号ではなく変数記号として使われている。しかし公理 4 では、「公理 3 で‘存在’が措定されたような要素を指す固体記号」のような、語用論的に複雑な使われ方（特殊な照応 anaphora のような）をしている。がその辺の語用論的事情が「わかるでしょ」的に端折られている。この端折りを避けるなら、*群の定義の一部としての*公理 3 と 4 は実は不可分。

3' $\quad \exists e \in \boldsymbol{G}\ \ \forall x \in \boldsymbol{G} \quad \{\ (x * e = e * x = x)\ \ \&\ \ (\exists y \in \boldsymbol{G} \quad x * y = y * x = e)\,\}$

つまり、「inverse をもたらす」という性質は、群における identity の必須の特徴であり、そのことは標準的定義で群を教える数学者たちももちろん理解している。こんな指摘は、ある意味「釈迦に説法」である。が、この語用論的な「重箱の隅つつき」分析でひとついえることは、

数学における推論能力の一端は、語用論的に正確な言語使用能力である

ということ。この*語用論的な言語能力*がどういう能力なのか、は、数学実践者でも必ずしも理解していない。（ネイティブ話者の多くが自分の言語の文法をある意味「知らない」のと同様。）

群の代替定義（「純普遍公理化」 版）

（planetmath.org にあるものを表記整理）

Let the non-empty set $\boldsymbol{G}$ satisfy the following three conditions:

I. For any a, b of $\boldsymbol{G}$, there is a unique element $a * b$ of $\boldsymbol{G}$.

II. For any a, b, c of $\boldsymbol{G}$, $(a * b) * c = a * (b * c)$.

III. For every two elements any a, b of $\boldsymbol{G}$, there exists at least one such element x and at least one such element y of $\boldsymbol{G}$ that $\quad x * a = a * y = b$.

Then the set $\boldsymbol{G}$ forms a group.

群代替定義の証明に見る量化子の二用法[3]

推論的文脈。
量化子は語用論的に用いられている（存在論的コミットメントなし）。

We start with $\forall a, b\, \exists x, y : xa = ay = b$. (1)

Let a $\in G$.

仮設的言及（fictional reference）。
これにより、仮設的（fictional）な言及的文脈が始まる。

Using (1) for a, a, we have that there are $e_l, e_r \in G$ s.t. $e_l a = a e_r = a$.
Using (1) for a, e_l, we have that there are $x, x' \in G$ s.t. $xa = ax' = e_l$.
Using (1) for a, e_r, we have that there are $y', y \in G$ s.t. $y'a = ay = e_r$.
$e_l = xa = x(ae_r) = (xa)e_r = e_l e_r = e_l(ay) = (e_l a)y = ay = e_r$.

仮設的な言及的文脈内。
量化子は意味論的に用いられており、仮設的レベルで存在論的コミットメントが生じている。

Therefore, we have $\forall x, \exists e_x : e_x x = x e_x = x$. (2)
In other words, for each $x \in G$, there is a *local* identity (so to speak) e_x for it.

Now, let $a, b \in G$ anew.
Using (2), there is $e_a \in G$ s.t. $e_a a = a e_a = a$ and there is $e_b \in G$ s.t. $e_b b = b e_b = b$.
Using (1) for b, e_a, we have that there are $x, x' \in G$ s.t. $xb = bx' = e_a$.
Using (1) for a, e_b, we have that there are $y', y \in G$ s.t. $y'a = ay = e_b$.
$e_a = xb = x(be_b) = (xb)e_b = e_a e_b = e_a(ay) = (e_a a)y = ay = e_b$.

Therefore, we have that all *local* identities e_x are equal, and thus we have shown that there is a *global* identity (so to speak) in G.

仮設的言及的文脈での「任意の元の理論的振る舞い」を観察後、ここで推論的文脈に復帰してその結果を「定理」表明。量化子は語用論的に用いられている。

[3] この証明は、Stack Exchange – Mathematics という掲示板のようなサービスで質問して教えてもらったもの。教えてくれた Dosidis 氏に感謝である。